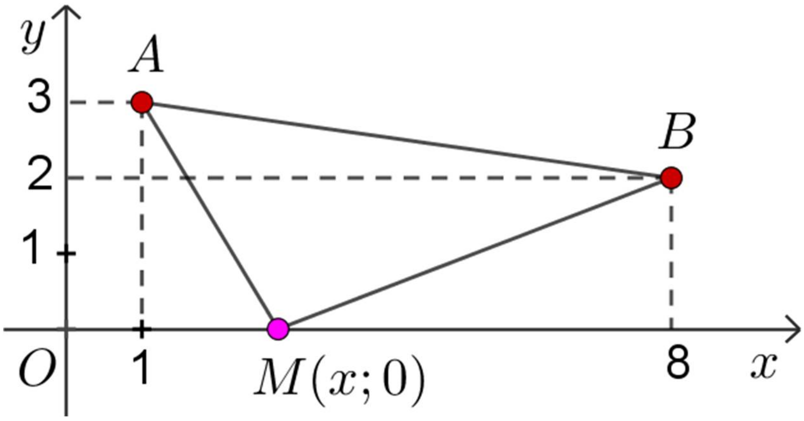
Problème

Dans un repère orthonormé du plan on donne $A(1;3)$, $B(8;2)$.
$M(x;0)$ est un point variable de l'axe des abscisses :

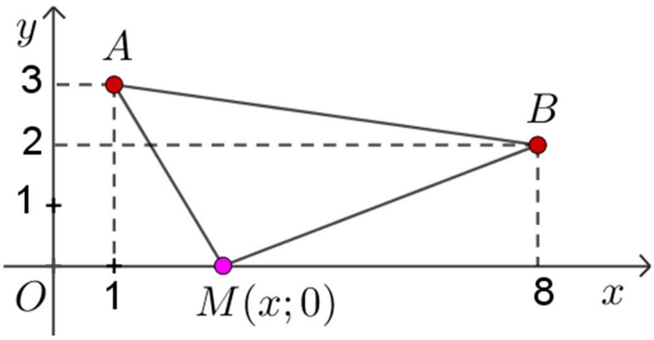


1. Calculer AB^2.
2. Exprimer AM^2 et MB^2 en fonction de x (on donnera les formes développées).
3. Déduire des questions précédentes qu'avec les notations de l'exercices on a l'équivalence : ABM est rectangle en $M \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 9x + 14 = 0$, en déduire pour quels points M de l'axe des abscisses le triangle ABM est rectangle en M.
5. Faire une vidéo d'utilisation de GeoGebra pour « vérifier ».

Corrigé

Exercice 1

Repère orthonormé, $A(1;3)$, $B(8;2)$ et $M(x;0)$ est un point variable de l'axe des abscisses



1. **Calculer la distance AB, en déduire AB^2.**
   Le repère est orthonormé donc on peut utiliser la formule de la distance :
   $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
   donc : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
   Or, $A(1;3)$, $B(8;2)$ donc :
   $$AB^2 = (8-1)^2 + (2-3)^2 = 7^2 + (-1)^2 = 49 + 1 = 50$$
   Résumons : $\boldsymbol{AB^2 = 50}$.

2. **Exprimer AM^2 et BM^2 en fonction de x (on donnera les formes développées).**
De même,

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$
$$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x-1)^2 + (0-3)^2 = x^2 - 2x + 1 + 9$$
$$\boldsymbol{AM^2 = x^2 - 2x + 10}$$

et :

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2}$$
$$BM^2 = (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 = (x-8)^2 + (0-2)^2 = x^2 - 16x + 64 + 4$$
$$\boldsymbol{BM^2 = x^2 - 16x + 68}$$

3. **Déduire des questions précédentes qu'avec les notations de l'exercices on a l'équivalence : ABM est rectangle en $M \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$**

$$ABM \text{ est rectangle en } M$$
$$\Leftrightarrow AM^2 + MB^2 = AB^2 (Pythagore)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 10 + x^2 - 16x + 68 = 50$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 78 - 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 28 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 9x + 14) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

On a donc bien l'équivalence : **ABM est rectangle en $M \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$** .

4. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 9x + 14 = 0$; pour quels points M appartenant à l'axe des abscisses le triangle ABM est-il rectangle en M ?**

$x^2 - 9x + 14$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -9$ et $c = 14$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(1)(14) = 81 - 56 = 25$.
$\Delta > 0$ donc $x^2 - 9x + 14$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+9 - \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{9-5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2(1)} = \frac{9+5}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

L'équation $x^2 - 9x + 14 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: 2 et 7.

<u>Conclusion</u>
Il existe exactement deux points M pour lesquels ABM est rectangle en M :

$$M_1(2; 0) \text{ et } M_2(7; 0)$$